PRECIZĂRI IMPORTANTE:

1. **Aproape toate exercițiile/problemele recomandate în schemele tematice prezentate mai jos au fost rezolvate la clasă**
2. **În vederea unei pregătiri cât mai eficiente pentru susținerea tezei, o repartizare recomandată a materiei prezentată mai jos ar fi următoarea:**

   22.04 – 25.04.2020 – Temele: I și II
   27.04 – 2.05.2020 – Temele: II și III
   4.05 – 9.05.2020 – Temele III și IV
   11.05 – 16.05.2020 – Tema IV
3. **La sfârșitul fiecărei perioade de câte două săptămâni, pe grupul de WhatsApp al clasei, veți primi câte un <u>model de subiect de teză</u> din materia recomandată să fie parcursă în perioada respectivă. Rezolvările modelelor transmise vor fi făcute pe caiet separat, sau pe un set de foi care conțin doar aceste modele rezolvate, pe care le veți prezenta în prima oră de curs, după reînceperea școlii. Vă doresc spor la pregătire!**

SCHEMA RECAPITULATIVĂ – MATEMATICĂ-9B
LUCRARE SCRISĂ, SEMESTRUL II

I. NOȚIUNEA DE FUNCȚIE – manual, pag. 98-105

DE REȚINUT!

Se vor repeta următoarele noțiuni teoretice (folosind caietul de notițe, sau manualul):

1. Definiția funcției (pag. 98)
2. Elementele de limbaj legate de definirea funcției (pag. 98,99)
3. Modalități de a define o funcție (pag. 100-102)
4. Egalitatea funcțiilor (pag. 102-103)
5. Imaginea și preimaginea unei mulțimi printr-o funcție (pag. 105-106)
6. Graficul unei funcții (pag. 106-107)
7. Restricții și prelungiri(extensii) ale unei funcții (pag. 107-108
8. Funcții numerice (pag. 109-115)
   - Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții
   - Intersecția graficului cu axele de coordonate (*Ox* și *Oy*)
   - Rezolvări grafice ale ecuațiilor și inecuațiilor

Exerciții recomandate (manual)

- pag. 104, ex. A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10.
- pag. 109, ex. A1, A2, A3.
- pag. 114-115, ex. E1, E2, E3, E4, E6, E8, E9.

II. PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR. COMPUNEREA FUNCȚIILOR – manual, pag. 116-133

DE REȚINUT!

Se vor repeta următoarele noțiuni teoretice (folosind caietul de notițe, sau manualul):

1. Funcții mărginite (pag. 116-117)
    - definiție
    - modalități de studiu a monotoniei
2. Funcții pare, funcții impare (pag. 118-122)
    - noțiunea de mulțime simetrică
    - definiția funcției pare; aspectul graficului unei funcții pare (simetric față de *Oy*)
    - definiția funcției impare; aspectul graficului unei funcții impare (simetric față de originea *O*)
    - funcție al cărei graphic este simetric față de dreapta $y=m$: $f(x)=f(2m-x)$
    - funcție al cărei grafic este simetric față de punctul P(a,b) : $f(x)+f(2a-x)=2b$
3. Funcții periodice (pag. 123-125)
    - definiția
    - determinarea perioadei unei funcții periodice
4. Funcții monotone (pag. 125-128)
    - definițiile pentru tipurile de monotonie (crescătoare, strict crescătoare etc.)
    - modalități practice de studiu pentru monotonia funcțiilor
5. Operații cu funcții. Compunerea funcțiilor. (pag. 128-131)
    - operații algebrice (pe caietul de notițe)
    - operație specifică (compunerea funcțiilor)

Exerciții recomandate (manual)

- funcții mărginite: pag. 117, ex. E1, E2, E3, E4.
- funcții pare/impare: pag. 121-122, ex. E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9
- funcții periodice: pag. 124-125, ex. E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7.
- funcții monotone: pag. 127-128, ex. E1-E5, A1-A3
- compunerea funcțiilor: pag. 130-131, ex. E1, E2, A1, A3

III. FUNCȚIA DE GRADUL I – manual, pag. 134-140

DE REȚINUT!

Se vor repeta următoarele noțiuni teoretice (folosind caietul de notițe, sau manualul):

- Definiție. Orice funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ unde $a, b \in \mathbb{R}$ se numește funcție afină.
- Cazuri particulare:

1. Dacă $a \neq 0$ funcția se numește funcție de gradul I, exemplu: $f(x) = \frac{4}{5}x - 3, a = \frac{4}{5}, b = -3$
2. Dacă $b = 0$ funcția se numește funcție liniară, exemplu: $f(x) = \frac{4}{5}x$, $a = \frac{4}{5}, b = 0 - 3$
3. Dacă $a = 0$ funcția este o funcție constantă, exemplu: $f(x) = -3$, $a = 0, b = -3$

- Alte aspecte cu privire la funcțiile afine:

1. Graficul funcției:
   - Cazul 1: graficul este o dreaptă oblică
   - Cazul 2: graficul este o dreaptă care trece prin originea sistemului de coordinate
   - Cazul 3. graficul este o dreaptă paralelă cu axa *Ox*
2. Monotonia funcției este dată de semnul lui *a*: $a > 0$ -funcția este strict crescătoare
   $a < 0$ -funcția este strict descrescătoare
3. Semn:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$	semn contrar semnului lui *a*		0	semnul lui *a*	

Exerciții recomandate

Recomand exercițiile de pe fișele transmise deja și pe care le reiau aici (o bună parte din aceste fișe au fost rezolvate):

FIȘA 1.

I. Ecuații de gradul I

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{4x-1}{3} - \frac{2x-1}{4} = 1$; b) $\frac{x-5}{x-2} = \frac{x-3}{x-4}$; c) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x^2-9}$; d) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{2x^2+x+2}{x^2-4}$.

2. Determinați valoarea reală a parametrului *m* astfel încât ecuațiile să admită soluția x_0 indicată:

a) $m(x+2) = x(m-5)$, $x_0 = 2$; b) $\frac{x-1}{4} + \frac{mx+2}{5} = 1$, $x_0 = 1$; c) $\frac{2mx+1}{3} + \frac{3mx-2}{2} = 2m$, $x_0 = \frac{1}{m}, m \neq 0$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după valorile parametrului real *m* ecuațiile:

a) $mx + 2 = 2x + 3m$; b) $mx + 3 = 3x + m$; c) $m^2x + 1 = 2m - x$; d) $m^2x + 6 = 2m + 9x$;
e) $\frac{mx+1}{x-1} + \frac{mx+2}{x+1} = \frac{2mx^2+mx}{x^2-1}$; f) $\frac{x-1}{m-1} = \frac{x+1}{m+1}$; g) $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x-1}{x+m}$.

4. A. Fie ecuația $mx = x + 2, m \in \mathbb{R}$.

a) să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după valorile parametrului real *m*.
b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația să aibă soluția în intervalul $(2,3]$.
c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația să aibă soluție întreagă.
d) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația să aibă soluția un număr natural.

B. Aceleași cerințe pentru ecuația $\frac{mx+2}{x+2} + \frac{mx-2}{x-2} = \frac{2mx^2+mx-10}{x^2-4}$.

II. Determinarea funcțiilor afine, graficul și restricții ale funcțiilor

1. Să se determine intersecțiile cu axele de coordinate ale graficului fiecăreia dintre funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ următoare: a) $f(x)=2-3x$; b) $f(x)=\left(3-2\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}-1$; c) $f(x)=(0{,}1+0{,}01)x-\frac{1}{2}-\frac{1}{20}$.
2. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât intersecțiile cu axekle de coordinate ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ să fie punctele A și B, unde: a) $f(x)=-4-2x,\ A(a^2-3a,0)$ și $B(0,3b-1)$;
   b) $f(x)=2bx+3a^2-7a,\ b\neq 0,\ A(3{,}0)$ și $B(0,-2)$;
3. Să se calculeze lungimea segmentului [AB], unde A și B reprezintă intersecțiile cu axele de coordonate ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
   a) $f(x)=3-2x$ b) $f(x)=x\sqrt{2}+\sqrt{8}$ c) $f(x)=\left(1-\sqrt{3}\right)x+4-2\sqrt{3}$.
4. Să se afle aria triunghiului determinat de graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și axele de coordinate pentru:
   a) $f(x)=2-x$ b) $f(x)=-6-2x$
5. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ al căror graphic este reprezentat de dreptele:
   a) $y=8+x$; b) $3y=x$; c) $2x-3y+1=0$;
   Ind. Se determină *y=f(x)* din fiecare relație de mai sus.

1. Să se determine funcțiile de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în fiecare caz:
   a) $f(1)=-2, f(2)=1$; b) graficul funcției conține punctele $A\left(\frac{1}{5},3\right)$ $și\ B\left(\frac{1}{2},-1\right)$
   Ind. $A(x_0,y_0)\in G_f \leftrightarrow f(x_0)=\ y_0$
2. a) Să se determine funcția de gradul I al cărei graphic intersectează axa *Ox* în punctual de abscisă -1 și axa *Oy* în punctual de ordonată -2.
   b) Să se determine funcția de gradul I al cărei grafic formează cu axele *Ox* și *Oy* un triunghi dreptunghic isoscel având ipotenuza de lungime 10.
3. Fie funcțiile : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ în fiecare dintre situațiile:
   a) Graficul funcției $f(x)=2m(x-3)+6$ trece prin originea reperului *xOy;*
   b) Graficul funcției $f(x)=-3x-4m+2$ conține punctul $P\left(\frac{1}{3},m\right)$;
   c) Graficul funcției $f(x)=\ (2-|m|)x-1$ este o dreaptă paralelă cu *Ox;*
   d) Graficul funcției $f(x)=2x-3m+7$ este o dreaptă $x=5m$ paralelă cu *Oy* .
4. Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare, unde:
   a) $A(1{,}2),B(3{,}0),C(2{,}1)$;
   b) $A(1{,}1),B(2{,}4),C(-1,-5)$;

Ind. Se determină , de exemplu, funcția determinată de punctele A și B și se arată că punctual C aparține graficului lui *f*.

5. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele A, B, C să fie coliniare, unde:
   a) $A(-1{,}1),B(1{,}2),C(a,1)$;
   b) $A(0{,}1),B(0{,}2),C(\ |2a-3|,-3)$;
   c) $A(-2{,}0),B(-3{,}0),C(2,a^2-a-6)$;
   d) $A(a-1,-1),B(a,a+2),C(a+1{,}4a+1)$.

6. Să se determine funcția al cărei graphic este:
   a) dreapta AB, unde $A(-1{,}1),B(2,-2)$;
   b) semidreapta [CD, unde $C(0{,}2),D(1{,}4)$;
   c) segmental [EF], unde $E(0-1{,}2),F(1,-4)$;
   d) reuniunea segmentelor [MN] și [NP], unde $M(-2{,}1),N(0{,}3),P(1{,}1)$;
7. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3$. Să se determine câte o restricție pe un interval *I* a funcției *f* astfel încât graficul acesteia să fie:
   a) un segment deschis; b) un segment închis; o semidreaptă închisă.

8. Să se reprezinte grafic funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ următoare:

a) $f(x)=x$; b) $f(x)=-x$; c) $f(x)=2$; d) $f(x)=\begin{cases}2-x, x\le 1\\ 2x\,, \ x>1\end{cases}$

9. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f:[2,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$; b) $f:[1,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$;

c) $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$; d) $f:\{0,1,2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-1$.

10. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x-4$. Să se reprezinte grafic restricțiile lui f la fiecare dintre intervalele I de mai jos:

a) $I=[-1,2]$; b) $I=(-\infty,0)$; c) $I=\{-4,-3,-2,1,2\}$; d) $I=[3,\infty)$.

11. Să se reprezinte graphic funcțiile:

a) $f:(-\infty,-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$; b) $f:[-3,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1-x$;

c) $f:(-\infty,-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$; d) $f:(1,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-5$.

12. Să se afle valoarea lui $a\in\mathbb{R}$ și să se reprezinte grafic $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde:

a) $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\ge a\\ -x+a, & x<a\end{cases}$ și $f(3)=5$

b) $f(x)=\begin{cases}-2x+a^2-2a, & x>a\\ x+|2a-1|-1, & x\le a\end{cases}$ și $f(1)=1$.

13. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ să fie o dreaptă:

a) $f(x)=\begin{cases}2, & x<1\\ (m-1)x+3n-4, & x\ge 1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}-1, & x<1\\ (m^2-4)x+m+1, & x\ge 1\end{cases}$

14. Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, știind că:

a) f este funcție pară și pentru $x\ge 0$ funcția este $f(x)=3x+1$.

b) f este funcție impară și pentru $x<0$ funcția este $f(x)=1-2x$.

c) funcția este impară, $f(x)=x$ pentru $x\in[0,2]$ și $f(x)=3$ pentru $x\in(2,\infty)$

Ind. Se ține cont că graficul unei funcții pare este simetric în raport cu axa *Oy*, iar al unei funcții impare este simetric față de originea reperului.

15. Să se arate că graficele funcțiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{3}$ și $g(x)=6-x\sqrt{3}$ formează cu axa *Ox* un triunghi echilateral.

FIȘA 2.

III. Monotonia funcției de gradul I

1. Să se stabilească monotonia funcțiilor : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=2x+1$; b) $f(x)=-0{,}1x+2$; c) $f(x)=13$; d) $f(x)=|-2+a|x-1$;

e) $f(x)=-\sqrt{3}x-2$; f) $f(x)=(a^2+2)x-2$;

2. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ următoare să fie:

a) strict crescătoare, unde $f(x)=(2m-3)x+1$;

b) crescătoare, unde $f(x)=(2m-3)x+1$;

c) strict descrescătoare, unde $f(x)=(2m-3)x+1$.

3. Să se studieze monotonia funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=(3m-4)x+1,\ m\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=(m^2+1)x-2,\ m\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=-2+(-1)^{[x]}\cdot(x+1)$; d) $f(x)=\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)x+2, a,b>0$;

e) $f(x)=\left(a+\frac{1}{a}\right)x+a+1,\ a>0$; f) $f(x)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)x+a+b,\quad a,b>0$;

g) $f(x)=(a^2+a+1)x-1,\ a\in\mathbb{R}$; h) $f(x)=(a^2+b^2-ab)x+a+b-ab,\ a,b\in\mathbb{R}$;

i) $f(x)=(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)x+a+b+c,\ a,b,c\in\mathbb{R}$.

Numerele *a*,*b*,*c* sunt diferite între ele, două câte două.

4. Să se studieze monotonia funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 1\\ 2x-3, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<-1\\ 2x+4, & x\ge -1\end{cases}$.

5. Să se studieze monotonia funcției $f\circ f$ unde:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-x, & x<1\\ -3x+1, & x\ge 1\end{cases}$$

6. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x<-1\\ mx-4, & x\ge -1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$:

a) Să se afle m astfel încât A(1,-3) să aparțină graficului lui f ;

b) Pentru m=1 să se studieze monotonia lui f ;

c) Pentru m=1 să se reprezinte grafic f.

7. a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+2+a, & x\le 1\\ 3x+2a, & x>1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$:

Să se afle $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie monotonă pe $\mathbb{R}$;

b) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-2x+m, & x\le -1\\ -x+2, & x>-1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$:

Să se afle $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie monotonă pe $\mathbb{R}$;

c) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}(1-m)x+1, & x\le 1\\ 2x-m, & x>1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$:

Să se afle $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

d) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{2-m}{3m}x+1, & x\le 1\\ 3x-2m, & x>1\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$:

Să se afle $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f este monotonă pe $\mathbb{R}$.

8. a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}x+13, & x>4\\ ax+1, & x\in[1,4]\\ 2x+1, & x<1\end{cases}$$ să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}3x-5, & x<1\\ (m-2)x-5, & x\in[1,3]\\ x+7, & x>3\end{cases}$$ să fie strict monotonă pe $\mathbb{R}$;

9. Fie familia de funcții $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=(m+2)x+3m-1, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul lui f_m să treacă prin origine.

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f_m să fie strict descrescătoare.

c) Să se demonstreze că graficele funcțiilor f_m trec printr-un punct fix.

10. Fie familia de funcții $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=m(x-3)+3, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul lui f_m să treacă prin punctual A(1,1).

b) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f_m să fie strict crescătoare.

c) Să se demonstreze că graficele funcțiilor f_m trec printr-un punct fix.

d) Să se demonstreze că $f_m\circ f_n=f_{m\cdot n}$

IV. Semnul funcției de gradul I

1. Să se stabilească semnul funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare, punând în evidență tabelul semnului acesteia:

a) $f(x) = 2x$; b) $f(x) = -x + 1$; c) $f(x) = 0{,}1x + 0{,}2$; d) $f(x) = \sqrt{3}x + 3$;
e) $f(x) = (a^2 + a + 1)x + 1,\ a \in \mathbb{R}$.

2. Să se determine semnul funcțiilor următoare:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x-1}$; b) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{x+2}$;
c) $f: \mathbb{R} \setminus \{1,3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$; d) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$;
e) $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{3-x}{x^2-1}$; f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$;
g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 3x+1, & x \ge 0 \end{cases}$.

3. Să se studieze semnul funcțiilor $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (2m-1)x + 1,\ m \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = (1-m)x - 2,\ m \in \mathbb{R}$;
c) $f(x) = (4 - m^2)x + 2 - m,\ m \in \mathbb{R}$.

4. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) \ge 0, \forall x > 1$, unde $f(x) = x - 2m$;
b) $f(x) \ge 0, \forall x \ge 1$, unde $f(x) = (m-1)x + 1$;
c) $f(x) \ge 0, \forall x \in (-\infty, 2]$ unde $f(x) = -x - 3m$;
d) $f(x) < 0, \forall x \in [2,3]$, unde $f(x) = (2m-1)x + 1$;
e) $f(x) \le 0, \forall x \in [-2,2]$, unde $f(x) = -mx + m + 1$;
f) $f(x) > 0, \forall x \in (-5,5)$, unde $f(x) = (3-m)x + m - 2$.

5. Să se rezolve inecuațiile:

A. a) $2x - 1 < 4$; b) $3x - 2 < 2 - 5x$; c) $4(x-1) < 5x - 14$; d) $\frac{2x-1}{3} \le 2$;
e) $1 - \frac{x-1}{3} \ge 2x$; f) $(x-1)(x-2) < (x-3)^2$; g) $\frac{1-x}{2} - \frac{2-x}{3} < 0$;
h) $(x-1)^2 + \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(x-3)^2}{3} - \frac{(x-4)^2}{4} \ge 1$.

B. a) $(2x-1)(x+2) \le 0$; b) $\frac{x+2}{x-1} \ge 0$; c) $\frac{x}{1-x} < 0$; d) $x(4-x) \ge 0$;
e) $\frac{x}{x+1} < 1$; f) $\frac{2x-3}{x+1} > 1 - \frac{3x-2}{x+1}$; g) $|x| \le 1$; h) $|x| > 1$; i) $|x-1| \le 2$;
j) $|2x-3| \ge 1$; k) $|2x| + |x-1| \le 2$.

6. Să se afle $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare sunt crescătoare pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{2m-1}{m}x - 1$; b) $f(x) = \frac{m-1}{m+1}x + 2$; c) $f(x) = \frac{m^2-4}{(m-2)^2}x + 2m$;

7. Să se afle $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare sunt descrescătoare pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{1-m}{2m}x - 2$; b) $f(x) = \frac{1-m^2}{m-1}x + 1$; c) $f(x) = \frac{m^2-6m+9}{3-m}x + m + 3$;

8. Să se afle mulțimile:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x-4}{x-5} \le 0\right\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{-x+1}{2x+3} \ge 0\right\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (3-2x)(x+4) > 0\}$.

9. Să se resolve sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} 2x - 1 \le x - 2 \\ 3 - x > 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5 - 2x \ge x - 3 \\ 4 - x < 3x + 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} < 0 \\ x + 2\sqrt{3} > 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} - \frac{x^3+8}{x+2} \ge 1 \\ (x+1)^2 - (x-1)^2 \le 2 \end{cases}$.

10. Să se afle $x \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe triunghiul având laturile următoare:

a) $x - 1,\ x,\ -x + 4$; b) $2x,\ 3 - 4x,\ x + 1$;

IV. FUNCȚII TRIGONOMETRICE – manual, pag. 239-259

DE REȚINUT!

Se vor repeta următoarele noțiuni teoretice (folosind caietul de notițe, sau manualul):

1. Definirea funcțiilor trigonometrice:

a) $f: \mathbb{R} \to [-1,1], \quad f(x) = sinx$

$f: \mathbb{R} \to [-1,1], \quad f(x) = cosx$

$f: \mathbb{R} \setminus \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = tgx$

$f: \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ctgx$

2. Valorile funcțiilor trigonometrice în puncte esențiale $(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

3. Graficele funcțiilor trigonometrice

4. Periodicitatea funcțiilor trigonometrice:

$\sin(x + 2\pi) = sinx; \ \cos(x + 2\pi) = cosx; \ tg(x + \pi) = tgx; \ ctg\,(x + \pi) = ctgx.$

4. Semnele funcțiilor trigonometrice (pe cadrane)

5. Reducerea la primul cadran; calculul valorilor funcțiilor trigonometrice pentru anumite valori

6. Monotonia funcțiilor trigonometrice (pe cadrane)

7. Paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice; pară: *cos*; impară: *sin, tg, ctg*.

8. Relații între funcțiile trigonometrice ale aceluiași unghi.

Formulele corespunzătoare acestei teme au mai fost transmise prin intermediul unei fișe pe care o reiau **AICI:**

A. Formule fundamentale

$\boldsymbol{sin^2x + cos^2x = 1}$ **-** formula fundamentală a trigonometriei

$\boldsymbol{tgx = \frac{sinx}{cosx}; \quad ctgx = \frac{cosx}{sinx}; \quad tgx = \frac{1}{ctgx}; \quad ctgx = \frac{1}{tgx}}$

B. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul celorlalte funcții trigonometrice:

	$\boldsymbol{sinx}$	$\boldsymbol{cosx}$	$\boldsymbol{tgx}$	$\boldsymbol{ctgx}$
$\boldsymbol{sinx}$		$\boldsymbol{\pm\sqrt{1-cos^2x}}$	$\boldsymbol{\frac{tgx}{\pm\sqrt{1+tg^2x}}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2x}}}$
$\boldsymbol{cosx}$	$\boldsymbol{\pm\sqrt{1-sin^2x}}$		$\boldsymbol{\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2x}}}$	$\boldsymbol{\frac{ctgx}{\pm\sqrt{1+ctg^2x}}}$
$\boldsymbol{tgx}$	$\boldsymbol{\frac{sinx}{\pm\sqrt{1-sin^2x}}}$	$\boldsymbol{\frac{\pm\sqrt{1-cos^2x}}{cosx}}$		$\boldsymbol{\frac{1}{ctgx}}$
$\boldsymbol{ctgx}$	$\boldsymbol{\frac{\pm\sqrt{1-sin^2x}}{sinx}}$	$\boldsymbol{\frac{cosx}{\pm\sqrt{1-cosx}}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{tgx}}$	

Deducerea formulelor din tabelul de mai sus se face plecând de la formula fundamental a trigonometriei. Pe parcursul deducerilor se întâlnesc unele exprimări care merită să fie “reținute”. Și anume:

$\boldsymbol{sin^2x = 1 - cos^2x}$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

C. Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor complementare:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ctg x$$

$$ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tg x$$

D. Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx \cdot tgy}$$

$$ctg(x \pm y) = \frac{ctgx \cdot ctgy \mp 1}{ctgy \pm ctgx}$$

E. Funcțiile trigonometrice ale dublului unui unghi:

(1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

(3) $tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$

(4) $ctg 2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}$

F. Funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi:

Din formulele E. (2) se deduce: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ din care apoi rezultă, înlocuind pe x cu $\frac{x}{2}$ următoarele formule:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$$

$$ctg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{\cos x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

G. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul lui $tg\frac{x}{2}$**:**

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$$

$$tg x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}$$

$$ctg x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}$$

Notă: Uneori se notează $tg\frac{x}{2}$ cu m; în acest caz formulele de mai sus devin:

$$sinx = \frac{2m}{1+m^2}, \ m \in \mathbb{R}$$

$$cosx = \frac{1-m^2}{1+m^2}, \ m \in \mathbb{R}$$

$$tgx = \frac{2m}{1-m^2}, \ m \in \mathbb{R}$$

$ctgx = \frac{1-m^2}{2m}, \ m \in \mathbb{R}$, formule care semnifică exprimarea “rațională” a funcțiilor trigonometrice

H. Formule pentru transformarea sumelor în produse și a produselor în sume:

- Transformarea sumelor în produse:

$$\boldsymbol{sinp + sinq = 2sin\frac{p+q}{2} \cdot cos\frac{p-q}{2}}$$

$$\boldsymbol{sinp - sinq = 2sin\frac{p-q}{2} \cdot cos\frac{p+q}{2}}$$

$$\boldsymbol{cosp + cosq = 2cos\frac{p+q}{2} \cdot cos\frac{p-q}{2}}$$

$$\boldsymbol{cosp - cosq = -2sin\frac{p-q}{2} \cdot sin\frac{p+q}{2}}$$

Obs. Pentru a deduce sumele și diferențele de tangente/cotangente se exprimă:

$\boldsymbol{tgp \pm tgq} = \frac{sinp}{cosp} \pm \frac{sinq}{cosq} = \frac{sinp \cdot cosq \pm sinq \cdot cosp}{cosp \cdot cosq} = \frac{\mathbf{sin}\,(\boldsymbol{p \pm q})}{\boldsymbol{cosp \cdot cosq}}$ etc.

- Transformarea produselor în sume:

$$\boldsymbol{sinx \cdot cosy = \frac{1}{2}\left(sin(x+y) + sin(x-y)\right)}$$

$$\boldsymbol{sinx \cdot siny = -\frac{1}{2}\left(cos(x+y) - cos(x-y)\right)}$$

$$\boldsymbol{cosx \cdot cosy = \frac{1}{2}\left(cos(x+y) + cos(x-y)\right)}$$

Exerciții recomandate (manual)

- pag. 250-251, ex. E1, E2, E3, E5, E6, E7, E9, E10, E11, E12, E13.
- pag. 255-256, ex. E1-E7, A1-A4
- pag. 258-259, ex. E1-E6, A3