PRECIZĂRI IMPORTANTE:

1. **Subiectul pentru teză, semestrul II va conține probleme din tematica prezentată mai jos, dintre problemele recomandate:**
   I. POLINOAME. ECUAȚII POLINOMIALE
   II. INTEGRALA DEFINITĂ
   III. TEME PARCURSE ÎN CULEGEREA DE SUBIECTE DE BAC (cele corespunzătoare subiectului I.1 și I.4 – conform schemei de mai jos)
2. **În vederea unei pregătiri cât mai eficiente pentru susținerea tezei, o repartizare recomandată a materiei prezentată mai jos ar fi următoarea:**
   22.04 – 25.04.2020 – Temele: I și III, parțial (I.4)
   27.04 – 2.05.2020 – Temele: I și III, parțial (I.4)
   4.05 – 9.05.2020 – Temele II și III, parțial (I.1)
   11.05 – 16.05.2020 – Temele II și III, parțial (I.1)
3. **La sfârșitul fiecărei perioade de câte două săptămâni, pe grupul de WhatsApp al clasei, veți primi câte un <u>model de subiect de teză</u> din materia recomandată să fie parcursă în perioada respectivă. Rezolvările modelelor transmise vor fi făcute pe caiet separat, sau pe un set de foi care conțin doar aceste modele rezolvate, pe care le veți prezenta în prima oră de curs, după reînceperea școlii. Vă doresc spor la pregătire!**

4. **PRECIZARE**. **Referitor la <u>Tema I</u>** (Polinoame. Ecuații polinomiale), având în vedere modificările intervenite la programa de bacalaureat, am eliminat din materia parcursă în semestrul al doilea, partea care nu se cere la bacalaureat și am menținut doar acea parte care se suprapune cu tematici din alte clase care se cer pentru bacalaureat. Acest lucru se reflectă în special în exercițiile pe care le-am recomandat să le rezolvați pentru pregătirea tezei. Schema care urmează face parte dintr-o schemă pe care v-am mai trimis-o (de aceea începe cu punctual 7.)

SCHEMA RECAPITULATIVĂ – MATEMATICĂ-12B
LUCRARE SCRISĂ, SEMESTRUL II

I. POLINOAME. ECUAȚII POLINOMIALE.

1. DE REȚINUT!

7. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

- rădăcinile unui polinom (Bezout)
- rădăcini multiple ale unui polinom
- ecuații algebrice; teorema fundamentală a algebrei; teorema Abel-Ruffini
- polinoame ireductibile: Dacă $f \in K[X]$, atunci:
  - cazul $K = \mathbb{C}$ - un polinom este ireductibil dacă și numai dacă are gradul I
  - cazul $K = \mathbb{R}$ - un polinom este ireductibil numai în următoarele cazuri:
    - f are gradul I;
    - f are gradul II și nu are rădăcini reale
  - cazul $= \mathbb{Q}$ și $K = \mathbb{Z}_p$, p prim , există polinoame ireductibile de orice grad (cele care nu au rădăcini în K)
- descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

8. Relațiile lui Viète

- scrierea relațiilor lui Viète pentru polinomul de gradul II, III, IV
- aplicații ale relațiilor:
  - a) Calculul valorii unei expresii care depinde de rădăcinile unei ecuații, fără a rezolva ecuația;
  - b) aflarea rădăcinilor unei ecuații când se cunoaște o relație suplimentară între acestea;
  - c) formarea unei ecuații când se cunosc rădăcinile;
  - d) rezolvarea unor sisteme omogene de ecuații

9. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Forma ecuației: $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0$

- ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$
  - dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$ este rădăcină a ecuației, atunci α divide pe a_0 (rădăcinile întregi ale unei ecuații cu coeficienți întregi se găsesc printer divizorii termenului liber);
  - dacă $\alpha = \frac{p}{q}$, fracție ireductibilă este rădăcină a ecuației date, atunci p divide termenul liber și q coeficientul dominant
- ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Q}$
  - dacă $u = a + \sqrt{b}$ este rădăcină a ecuației, atunci:
    - a) $\bar{u} = a - \sqrt{b}$ este de asemenea rădăcină
    - b) u și $\bar{u}$ au același ordin de multiplicitate
- ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{R}$
  - dacă $z = a + bi$ este rădăcină a ecuației, atunci:
    - a) $\bar{z} = a - bi$ este de asemenea rădăcină
    - b) z și $\bar{z}$ au același ordin de multiplicitate

10. Rezolvarea unor ecuații algebrice particulare (recapitulare din clasele precedente)

a) Ecuații bipătrate

$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$, respective, mai general $a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0$

b) Ecuații binome

$z^n = a$

c) Ecuații reciproce

- de gradul 3: $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + b \cdot x + a = 0$
- de gradul 4: $a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + b \cdot x + a = 0$ etc.

<u>Exerciţii recomandate</u>

MANUAL pag. 144-146, ex. E1, E2, E4, E5, A3, A4, A5.
pag. 151-152, ex. E1, E3, E4, A2.
pag. 160-162, ex. E1, E2, E4, E5.
pag. 167-169, ex. E1- E5, A1.

II. INTEGRALA DEFINITĂ (conform programei de bacalaureat).

DE REȚINUT!

• Diviziuni ale unui interval $[a,b]$, norma unei diviziuni, sistem de puncte intermediare, sume Riemann, interpretare geometrică. Definiţia integrabilităţii unei funcţii pe un interval $[a,b]$

<u>Exerciţii recomandate</u> (manual)

pag. 201, ex. E1, A3

• Proprietăţi ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare.

- liniaritate: Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții integrabile pe $[a,b]$ atunci:

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx,\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

- monotonie: Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții integrabile pe $[a,b]$ atunci:

a) dacă $f(x)\geq 0,$ atunci $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ (pozitivitatea integralei)

b) dacă $f(x)\geq g(x),$ atunci $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$ (monotonia integralei)

c) dacă $m\leq f(x)\leq M,$ atunci $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$ (mărginirea integralei)

- aditivitate: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $c\in[a,b]$. Dacă funcția dată este integrabilă pe intervalele $[a,c]$ și $[c,b]$, atunci *f* este integrabilă pe $[a,b]$ și $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

<u>Exerciţii recomandate</u> (manual)

pag. 216-217, ex. E1, E2, E3, E4, A1, A2, A3, A4, A5-A9

• Formula Leibniz – Newton

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe $[a,b]$ care admite primitive pe $[a,b]$. Atunci pentru orice primitivă *F* a lui *f* are loc egalitatea: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

<u>Exerciţii recomandate</u> (manual)

pag. 208-209, ex. E1- E3, A1- A3.

• Integrabilitatea funcţiilor continue, teorema de medie, interpretare geometrică, teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue

- Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a,b]$, atunci este integrabilă pe $[a,b]$.
- Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este funcție continuă, atunci există $\xi\in[a,b]$ astfel încât $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(\xi)$
- Interpretarea geometrică, în manual, pag. 220
- Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_a^x f(t)dt,\ \forall x\in[a,b]$ este o primitivă a funcției *f* care se anulează în *a*.

<u>Exerciţii recomandate</u> (manual)

pag. 223 ex. E1- E4.

• Metode de calcul al integralelor definite: integrarea prin părţi, integrarea prin schimbare de variabilă.

- Metoda formulelor de integrare (aplicarea directă a formulelor)

Exerciții recomandate (manual) – aceleași exerciții care au fost recomandate și la formula Leibniz – Newton

pag. 208-209, ex. E1- E3, A1- A3.

- Metoda integrării prin părți

Exerciții recomandate (manual)

pag. 229-230, ex. E1- E4, A1- A4.

- Metoda schimbării de variabilă (metoda întâi și metoda a doua)

Exerciții recomandate (manual)

- metoda întâi:

pag. 236-238, ex. E1-E4, A1-A4.

pag. 254-255, ex. E1-E8 (funcții raționale)

pag. 261-262, ex. E1-E4, A1, A2 (funcții raționale)

- metoda a doua:

pag. 240-241, ex. E1, E2, A1-A3.

III. TEME PARCURSE ÎN CULEGEREA DE SUBIECTE DE BAC (Editura *Paralela 45*)

A. PROBLEME DE NUMĂRARE
(Subiectul I, problema 4 din variantele de bacalaureat)

DE REȚINUT!

1. **Formula probabilității**

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{număr} \boldsymbol{ul\ cazurilor\ favorabile}}{\boldsymbol{număr}\boldsymbol{ul\ cazurilor\ egal\ posibile}} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$$

2. **Probleme de numărare:**

A. **Sunt probleme în care se cere să se determine:**
- Numărul elementelor unor mulțimi finite
- Numărul de submulțimi ale unor mulțimi finite
- Numărul de submulțimi cu proprietăți special, ale unor mulțimi finite

Tipuri de probleme:

a) Dacă A și B sunt mulțimi disjuncte, atunci
$\overline{A \cup B} = \bar{A} + \bar{B}$, unde $\bar{M}$ reprezintă cardinalul(numărul elementelor)lui M.

b) Dacă $B \subset A, atunci\ \overline{A \setminus B} = \bar{A} - \bar{B}$

c) Principiul includerii și excluderii
$\overline{A \cup B} = \bar{A} + \bar{B} - \overline{A \cap B}$ sau pentru trei mulțimi:
$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} - \overline{A \cap B} - \overline{A \cap C} - \overline{B \cap C} + \overline{A \cap B \cap B}$ formă care se poate ușor generaliza.

d) Principiul produsului
$\overline{AxB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, respective, $\overline{AxBxC} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ etc.

e) $\overline{\mathcal{P}(A)} = 2^{\bar{A}}$ -numărul submulțimilor lui A

B. **Numărul funcțiilor**

Considerăm $f: A \to B$ în care $\bar{A} = a$ și $\bar{B} = b$, atunci:

a) Numărul tuturor acestor funcții este $\boldsymbol{b^a}$**;**

b) Există funcții injective dacă și numai dacă $a \leq b$. În acest caz numărul funcțiilor injective este $\boldsymbol{A_b^a}$

c) Există funcții surjective dacă și numai dacă $a \geq b$. În acest caz numărul funcțiilor surjective este
$b^a - C_b^1(b-1)^a + C_b^2(b-2)^a - \ \ldots + (-1)^{b-1}C_b^{b-1}$ (facultative nu este în programa școlară)

d) Există funcții bijective dacă și numai dacă $a = b$. În acest caz numărul funcțiilor bijective este $\boldsymbol{P_a = a!}$

e) Există funcții strict crescătoare dacă și numai dacă $a \leq b$ (injectivă). În acest caz numărul funcțiilor strict cu crescătoare este $\boldsymbol{C_b^a}$

f) Numărul funcțiilor crescătoare (nu strict) este $\boldsymbol{C_{a+b-1}^a}$.

3. **Alte noțiuni teoretice**

A. **Permutări** (funcții bijective); numărul de permutări: $\mathbf{P_n = n!}$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; prin convenție: $0! = 1$
- Calcul cu factoriale (se recapitulează)

B. **Aranjamente:** numărul de submulțimi ordonate cu *k* elemente ale unei mulțimi de *n* elemente: $\boldsymbol{A_n^k}$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Calcul cu aranjamente (se recapitulează)

C. **Combinări:** numărul de submulțimi cu *k* elemente ale unei mulțimi de *n* elemente: $\boldsymbol{C_n^k}$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{\mathrm{P_k}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- Calcul cu combinări (se recapitulează)

D. **Ecuații cu permutări, aranjamente, combinări** (se recapitulează)

E. **Binomul lui Newton**

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^n b^n$
$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ - termenul general al binomului

Pentru binomul diferență, în formulă, semnele alternează începând cu plus, iar formula termenului general este $T_{k+1} = (-1)^k \cdot C_n^k a^{n-k} b^k$
Se vor repeta problemele specifice teme

Exerciții recomandate

Subiectul I, problema 4 din modelele de teste publicate în culegerea apărută la Paralela 45 (T.1-T.60)

B. CALCUL CU NUMERE

(Subiectul I, problema 1 din variantele de bacalaureat)

1. Numere iraționale/reale: T6, T8, T29, T30, T38, T49, T57
2. Numere complexe: T1, T4, T9, T12, T15, T17, T18, T20, T22, T25, T28, T32, T36, T39, T45, T46, T53, T59
3. Calcul cu logaritmi: T5, T10, T13, T16, T26, T27, T33, T35, T37, T42, T43, T48, T50, T54.
4. Calcul cu permutări, aranjamente, combinări: T11
5. Progresii: T2, T3, T7, T14, T19, T21, T23, T24, T31, T34, T40, T41, T44, T47, T51, T52, T58, T60.

Un rezumat teoretic pentru temele de mai sus, îl găsiți în Culegerea cu teste, astfel:

1. pag. 371, paragraful 1.9 (Operații cu puteri și radicali)

2. pag. 371-372, paragraful 1.11 (Numere complexe)

3. pag. 371, paragraful 1.10 (Logaritmul unui număr real pozitiv)

4. pag. 372-373, paragraful 1.12 (Combinatorică)- o parte dintre aceste noțiuni găsiți și la A. Probleme de numărare la subpunctul 3 (Alte noțiuni teoretice)

5. pag. 369, paragraful 1.5 (Progresii)