PROBLEME DE NUMĂRARE
(Subiectul I, problema 4 din variantele de bacalaureat)

O SCURTĂ EXPUNERE A CONSIDERENTELOR NECESARE

1. **Formula probabilității**

$$\boldsymbol{p} = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor egal posibile}} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$$

2. **Probleme de numărare:**

   A. <u>Sunt probleme în care se cere să se determine:</u>
   - Numărul elementelor unor mulțimi finite
   - Numărul de submulțimi ale unor mulțimi finite
   - Numărul de submulțimi cu proprietăți special, ale unor mulțimi finite

<u>Tipuri de probleme:</u>

a) Dacă A și B sunt mulțimi disjuncte, atunci
$\overline{A \cup B} = \bar{A} + \bar{B}$, unde $\bar{M}$ reprezintă cardinalul(numărul elementelor)lui M.

b) Dacă $B \subset A, atunci\ \overline{A \setminus B} = \bar{A} - \bar{B}$

c) Principiul includerii și excluderii
$\overline{A \cup B} = \bar{A} + \bar{B} - \overline{A \cap B}$ sau pentru trei mulțimi:
$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} - \overline{A \cap B} - \overline{A \cap C} - \overline{B \cap C} + \overline{A \cap B \cap B}$ formă care se poate ușor generaliza.

d) Principiul produsului
$\overline{AxB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, respective, $\overline{AxBxC} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ etc.

e) $\overline{\mathcal{P}(A)} = 2^{\bar{A}}$ -numărul submulțimilor lui A

B. <u>Numărul funcțiilor</u>

Considerăm $f: A \to B$ în care $\bar{A} = a$ și $\bar{B} = b$, atunci:

a) Numărul tuturor acestor funcții este $\boldsymbol{b^a}$**;**

b) Există funcții injective dacă și numai dacă $a \leq b$. În acest caz numărul funcțiilor injective este $\boldsymbol{A_b^a}$

c) Există funcții surjective dacă și numai dacă $a \geq b$. În acest caz numărul funcțiilor surjective este
$b^a - C_b^1(b-1)^a + C_b^2(b-2)^a - \ ... + (-1)^{b-1}C_b^{b-1}$ (facultative nu este în programa școlară)

d) Există funcții bijective dacă și numai dacă $a = b$. În acest caz numărul funcțiilor bijective este $\boldsymbol{P_a = a!}$

e) Există funcții strict crescătoare dacă și numai dacă $a \leq b$ (injectivă). În acest caz numărul funcțiilor strict cu crescătoare este $\boldsymbol{C_b^a}$

f) Numărul funcțiilor crescătoare (nu strict) este $\boldsymbol{C_{a+b-1}^a}$.

3. **Alte noțiuni teoretice**

   A. Permutări (funcții bijective); numărul de permutări: $\mathbf{P_n = n!}$

   $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$; prin convenție: $0! = 1$

   - Calcul cu factoriale (se recapitulează)

   B. Aranjamente: numărul de submulțimi ordonate cu *k* elemente ale unei mulțimi de *n* elemente: $\boldsymbol{A_n^k}$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ ...\ (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

   - Calcul cu aranjamente (se recapitulează)

   C. Combinări: numărul de submulțimi cu *k* elemente ale unei mulțimi de *n* elemente: $\boldsymbol{C_n^k}$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{\mathrm{P_k}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

   - Calcul cu combinări (se recapitulează)

   D. Ecuații cu permutări, aranjamente, combinări (se recapitulează)

   E. Binomul lui Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ ... + C_n^k a^{n-k} b^k + \ ... + C_n^n b^n$$

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ - termenul general al binomului

Pentru binomul diferență, în formulă, semnele alternează începând cu plus, iar formula termenului general este $T_{k+1} = (-1)^k \cdot C_n^k a^{n-k} b^k$
Se vor repeta problemele specifice teme

TEMĂ. Subiectul I, problema 4 din modelele de teste publicate în culegerea apărută la Paralela 45 (T.1-T.60)