POLINOAME. ECUAȚII POLINOMIALE.
BREVIAR TEORETIC

1. Forma algebrică a unui polinom

$$f = a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot X^1 + a_0 ,$$

$a_i - coeficienții\ polinomului, X - nedeterminata\ polinomului$

$a_n \neq 0$ - coeficientul dominant al polinomului

a_0 - termenul liber al polinomului

n – gradul polinomului

2. Egalitatea polinoamelor

- au același grad și coeficienții corespunzători, respectivi egali

3. Valoarea unui polinom. Funcții polinomiale

Dacă $f = a_n \cdot X^n + a_{n-1} \cdot X^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot X^1 + a_0 \in K[X]$, și $\alpha \in K$, atunci valoarea polinomului f pentru $\alpha \in K$ este $f(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \alpha^1 + a_0 \in K$

4. Funcție polinomială

Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul. Se numește funcție polinomială atașată polinomului f, funcția $f: K \to K, f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0 , x \in K$.

5. Operații cu polinoame

a) adunarea
b) scăderea
c) înmulțirea
d) împărțirea (algoritmul specific)
- teorema împărțirii cu rest
- împărțirea prin $X - \alpha$ (schema lui Horner)

6. Divizibilitatea polinoamelor

- relația de divizibilitate, divizor, multiplu,
- proprietățile relației de divizibilitate
- polinoame asociate în divizibilitate
- cel mai Mare divisor comun; proprietăți
- determinarea c.m.M.d.c. (algoritmul lui Euclid)
- cel mai mic multiplu comun, $f \cdot g = (f, g) \cdot [f, g]$

7. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

- rădăcinile unui polinom (Bezout)
- rădăcini multiple ale unui polinom
- ecuații algebrice; teorema fundamentală a algebrei; teorema Abel-Ruffini
- polinoame ireductibile: Dacă $f \in K[X]$, atunci:
  - cazul $K = \mathbb{C}$ - un polinom este ireductibil dacă și numai dacă are gradul I
  - cazul $K = \mathbb{R}$ - un polinom este ireductibil numai în următoarele cazuri:
    - f are gradul I;
    - f are gradul II și nu are rădăcini reale
  - cazul $= \mathbb{Q}\ și\ K = \mathbb{Z}_p,\ p$ prim , există polinoame ireductibile de orice grad (cele care nu au rădăcini în K)
- descompunereapolinoamelor în factori ireductibili

8. Relațiile lui Viète

- scrierea relațiilor lui Viète pentru polinomul de gradul II, III, IV
-aplicații ale relațiilor:

a) Calculul valorii unei expresii care depinde de rădăcinile unei ecuații, fără a rezolva ecuația;
b) aflarea rădăcinilor unei ecuații când se cunoaște o relație suplimentară între acestea;
c) formarea unei ecuații când se cunosc rădăcinile;
d) rezolvarea unor sisteme omogene de ecuații

9. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Forma ecuației: $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0$

- ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}$
  - dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$ este rădăcină a ecuației, atunci α divide pe a_0 (rădăcinile întregi ale unei ecuații cu coeficienți întregi se găsesc printer divizorii termenului liber);
  - dacă $\alpha = \frac{p}{q}$, fracție ireductibilă este rădăcină a ecuației date, atunci p divide termenul liber și q coeficientul dominant
- ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Q}$
  - dacă $u = a + \sqrt{b}$ este rădăcină a ecuației, atunci:
    a) $\bar{u} = a - \sqrt{b}$ este de asemenea rădăcină
    b) u $și$ $\bar{u}$ au același ordin de multiplicitate
- ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{R}$
  - dacă $z = a + bi$ este rădăcină a ecuației, atunci:
    a) $\bar{z} = a - bi$ este de asemenea rădăcină
    b) z $și$ $\bar{z}$ au același ordin de multiplicitate

10. Rezolvarea unor ecuații algebrice particulare (recapitulare din clasele precedente)

a) Ecuații bipătrate
$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$, respective, mai general $a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0$

b) Ecuații binome
$z^n = a$

c) Ecuații reciproce
- de gradul 3: $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + b \cdot x \quad + a = 0$
- de gradul 4: $a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + b \cdot x \quad + a = 0$ etc.

SUGESTIE privind aplicații la partea teoretică prezintă succinct mai sus:

Având în vedere activitatea de pregătire a examenului de bacalaureat și ținând cont că la clasă am parcurs exercițiile propuse în modelele de teste publicate în Editura Paralela 45, cele referitoare la tema "polinoame", rămânând nerezolvate cerințele care implicau și noțiunea de "ecuație". Este vorba de problemele din teste de la Subiectul II, problema 2. (notat mai jos II.2)
Astefel, rezolvați în următoarea perioadă următoarele probleme, și totodată repetați partea teoretică din "Breviarul theoretic" pe care l-am prezentat mai sus:

Subiectul II problema 2 de la următoarele teste: T2; T4; T5; T7; T8; T9; T12; T15; T18; T19; T20; T21; T22; T23; T24; T27; T29; T31; T32; T33; T34; T37; T38; T39; T41; T42; T44; T45; T46; T47; T49; T50; T51; T55; T56; T57; T59; T60.

Câteva sugestii: T8 – c) se folosește faptul că $f = X \cdot g + 1$ și apoi relațiile lui Viète
T9 – a) dacă toate cele patru rădăcini ar fi reale atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > 0$; așadar, calculăm suma pătratelor rădăcinilor și arătăm că este negativă
T31 – a) suma coeficienților unui polinom *f* este *f*(1)
T42 – c) se folosește rezultatul de la a) și precizarea de la T9, a)

RECOMANDARE. Repartizați parcurgerea acestei temati pe o perioadă de 7 zile.