MATEMATICĂ – 9B

FORMULE TRIGONOMETRICE (caractere ***bold***)

Se memorează!!!! (folosiți timpul acesta și pentru acest lucru)

SUCCES!!!!!!

A. Formule fundamentale

$\boldsymbol{sin^2x + cos^2x = 1}$ **-** formula fundamentală a trigonometriei

$\boldsymbol{tgx = \frac{sinx}{cosx}}$; $\boldsymbol{ctgx = \frac{cosx}{sinx}}$; $\boldsymbol{tgx = \frac{1}{ctgx}}$; $\boldsymbol{ctgx = \frac{1}{tgx}}$

B. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul celorlalte funcții trigonometrice:

	$sinx$	$cosx$	tgx	$ctgx$
$sinx$		$\pm\sqrt{1-cos^2x}$	$\frac{tgx}{\pm\sqrt{1+tg^2x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2x}}$
$cosx$	$\pm\sqrt{1-sin^2x}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2x}}$	$\frac{ctgx}{\pm\sqrt{1+ctg^2x}}$
tgx	$\frac{sinx}{\pm\sqrt{1-sin^2x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-cos^2x}}{cosx}$		$\frac{1}{ctgx}$
$ctgx$	$\frac{\pm\sqrt{1-sin^2x}}{sinx}$	$\frac{cosx}{\pm\sqrt{1-cosx}}$	$\frac{1}{tgx}$	

Deducerea formulelor din tabelul de mai sus se face plecând de la formula fundamental a trigonometriei. Pe parcursul deducerilor se întâlnesc unele exprimări care merită să fie "reținute". Și anume:

$\boldsymbol{sin^2x = 1 - cos^2x}$

$\boldsymbol{cos^2x = 1 - sin^2x}$

$\boldsymbol{1 + tg^2x = \frac{1}{cos^2x}}$

$\boldsymbol{1 + ctg^2x = \frac{1}{sin^2x}}$

C. Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor complementare:

$\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx}$

$\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx}$

$\boldsymbol{tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ctgx}$

$\boldsymbol{ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tgx}$

D. Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri:

$\boldsymbol{sin(x \pm y) = sinx \cdot cosy \pm siny \cdot cosx}$

$\boldsymbol{cos(x \pm y) = cosx \cdot cosy \mp sinx \cdot siny}$

$\boldsymbol{tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx \cdot tgy}}$

$\boldsymbol{ctg(x \pm y) = \frac{ctgx \cdot ctgy \mp 1}{ctgy \pm ctgx}}$

Temă: Folosind formulele de mai sus, deduceți formule pentru: $sin(x + y + z)$; $cos(x + y + z)$; $tg(x + y + z)$

E. Funcțiile trigonometrice ale dublului unui unghi:

(1) $\boldsymbol{sin2x = 2\ sinx\ cosx}$

(2) $\boldsymbol{cos2x = cos^2x - sin^2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sin^2x}$

(3) $\boldsymbol{tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2x}}$

(4) $\boldsymbol{ctg2x = \frac{ctg^2x - 1}{2ctgx}}$

Temă: Folosind rezultatele de la tema precedent, deduceți formule pentru: $sin3x$; $cos3x$; $tg3x$

F. Funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi:

Din formulele E. (2) se deduce: $sin^2x = \frac{1-cos2x}{2}$

$cos^2x = \frac{1+cos}{2}$ din care apoi rezultă, înlocuind pe x cu $\frac{x}{2}$ următoarele formule:

$$\boldsymbol{sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cosx}{2}}}$$

$$\boldsymbol{cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cosx}{2}}}$$

$$\boldsymbol{tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}} = \frac{1-cosx}{sinx} = \frac{cosx}{1+cosx}}$$

$$\boldsymbol{ctg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cosx}{1-cosx}} = \frac{cosx}{1-cosx} = \frac{1+cosx}{sinx}}$$

G. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul lui $tg\frac{x}{2}$:

$$\boldsymbol{sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

$$\boldsymbol{cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

$$\boldsymbol{tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}}$$

$$\boldsymbol{ctgx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}}$$

Notă: Uneori se notează $tg\frac{x}{2}$ cu m; în acest caz formulele de mai sus devin:

$sinx = \frac{2m}{1+m^2}$, $m \in \mathbb{R}$

$cosx = \frac{1-m^2}{1+m^2}$, $m \in \mathbb{R}$

$tgx = \frac{2m}{1-m^2}$, $m \in \mathbb{R}$

$ctgx = \frac{1-m^2}{2m}$, $m \in \mathbb{R}$, formule care semnifică exprimarea "rațională" a funcțiilor trigonometrice

H. Formule pentru transformarea sumelor în produse și a produselor în sume:

- Transformarea sumelor în produse:

$$\boldsymbol{sinp + sinq = 2sin\frac{p+q}{2} \cdot cos\frac{p-q}{2}}$$

$$\boldsymbol{sinp - sinq = 2sin\frac{p-q}{2} \cdot cos\frac{p+q}{2}}$$

$$\boldsymbol{cosp + cosq = 2cos\frac{p+q}{2} \cdot cos\frac{p-q}{2}}$$

$$\boldsymbol{cosp - cosq = -2sin\frac{p-q}{2} \cdot sin\frac{p+q}{2}}$$

Obs. Pentru a deduce sumele și diferențele de tangent/cotangentei se exprimă:

$\boldsymbol{tgp \pm tgq} = \frac{sinp}{cosp} \pm \frac{sinq}{cosq} = \frac{sinp\cdot cosq \pm sinq\cdot cosp}{cosp\cdot cosq} = \frac{\mathbf{sin}\,(\boldsymbol{p\pm q})}{\boldsymbol{cosp\cdot cosq}}$ etc.

- Transformarea produselor în sume:

$$\boldsymbol{sinx \cdot cosy = \frac{1}{2}\big(sin(x+y) + sin(x-y)\big)}$$

$$\boldsymbol{sinx \cdot siny = -\frac{1}{2}\big(cos(x+y) - cos(x-y)\big)}$$

$$\boldsymbol{cosx \cdot cosy = \frac{1}{2}\big(cos(x+y) + cos(x-y)\big)}$$